Математические заметки

том 81 выпуск 3 март 2007

УДК 511.33

О МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ СВОЙСТВАХ ПО МОДУЛЮ m ЧИСЕЛ С ПРОПУЩЕННЫМИ ЦИФРАМИ

Н. Г. Мощевитин, И. Д. Шкредов

Получены оценки сверху для сумм значений характеров по составному модулю по множествам чисел с пропущенными цифрами в некоторой системе счисления. Имеются результаты о разрешимости сравнений вида $x_1 \cdots x_t \equiv \lambda \pmod m$ в числах с пропущенными цифрами и асимптотические формулы для количества решений.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Всюду ниже s, k – натуральные числа, $D = \{d_0, \dots, d_k\} \subset \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 = d_0 < d_1 < \dots < d_k < s$, $1 \leqslant k \leqslant s-2$, – некоторое фиксированное множество цифр в системе счисления по основанию s и $(d_1, \dots, d_k) = 1$. В настоящей работе исследуется распределение элементов множеств вида

$$K_s^D(N) = \left\{ x \in \mathbb{N}_0 : x < N,\ x = \sum_{j=0}^{h} \delta_j s^j,\ \delta_j \in D \right\} \tag{1}$$

в мультипликативной группе вычетов по модулю m. Ниже мы всюду полагаем

$$(m, s) = 1.$$

Недавно С. В. Конягин [1] доказал, что для натуральных N и m, $(m,s) = 1$, таких, что

$$N > \exp(\gamma \log m \log\log m)$$

(здесь γ – некоторая постоянная, зависящая от s), элементы множества $K_s^D(N)$ равномерно распределены по модулю m. В качестве следствия получалось, что при указанных условиях для всякого целого x найдется $a \in K_s^D(N)$ такое, что $a \equiv x \pmod m$. В этой же работе Конягин ставит следующую задачу: верно ли, что существует некоторая постоянная $\sigma(s)$, что в предположении

$$N > m^{\sigma(s)} \tag{2}$$

в множестве $K_s^D(N)$ встречаются все вычеты по модулю m. Сам Конягин дает положительный ответ на этот вопрос для "почти всех" натуральных m. В самом простом

Работа выполнена при поддержке грантов Президента РФ, гранты № МД-3003.2006.1 и № МК-1726.2006.1, Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 06-01-00518 и № 06-01-00383, и фонда INTAS, грант № 03-51-5070.

случае, когда $\operatorname{ord}_m s \leqslant \beta \log m$ с некоторой константой $\beta > 0$, положительный ответ дан в [2].

В настоящей работе мы доказываем ряд результатов о распределении элементов множеств (1) по модулю m при условии (2): оцениваем суммы значений характеров по модулю m на элементах множеств (1) и доказываем ряд утверждений о количестве $T_l(N,m,\lambda)$ решений сравнений вида

$$x_1 \cdots x_l \equiv \lambda \pmod m, \qquad x_j \in K_s^D(N),$$

при $(\lambda, m) = 1$. В частности, для произвольного натурального m и $l \geqslant 4$ при $N \geqslant m^\sigma$ с достаточно большим положительным σ для числа решений сравнения будет доказана асимптотическая формула

$$T_l(N,m,\lambda) = \frac{|K_s^D(N,m)|^l}{\varphi(m)} \cdot \bigl(1 + O\bigl(\exp(-\sqrt{\gamma \log m}\,)\bigr)\bigr), \qquad \gamma > 0, \quad m \to \infty;$$

если $l = 3$, то будет доказана формула

$$T_3(N,m,\lambda) = \frac{|K_s^D(N,m)|^3}{\varphi(m)} \cdot \left(1 + O\left(\exp\left(-\sqrt{\frac{\gamma \log m \log\log\log m}{\log\log m}}\right)\right)\right),$$
$$\gamma > 0, \quad m \to \infty,$$

где $|K_s^D(N,m)|$ есть количество элементов в множестве

$$K_s^D(N,m) = \{x \in K_s^D(N) : (x,m) = 1\}.$$

В случае $l = 2$ нами будет получена оценка

$$T_2(N,m,\lambda) \ll \frac{|K_s^D(N)|^2}{\varphi(m)} \cdot m^\varepsilon, \qquad m \to \infty,$$

причем для мощности “исключительного множества” (т.е. множества тех λ, для которых сравнение $x_1 x_2 \equiv \lambda \pmod m$ неразрешимо в числах $x_j \in K_s^D(N)$) будет получена оценка сверху вида $O(\varphi(m) \cdot \exp(-\sqrt{\gamma \log m}\,))$, $\gamma > 0$. Особо отметим, что в случае $m = p$ – простое число вместо упомянутых двух первых оценок будет справедлив более сильный результат

$$T_l(N,p,\lambda) = \frac{|K_s^D(N,p)|^l}{p-1} \cdot \bigl(1 + O(p^{-l/2+1+l\varepsilon})\bigr), \qquad l \geqslant 3,$$

при σ достаточно большом в зависимости от ε, а для исключительного множества в бинарной задаче при $m = p$ у нас будет оценка $O(p^\varepsilon)$.

Точные формулировки основных результатов настоящей работы даны в п. 6 (суммы значений характеров) и пп. 7, 8 (числа решений сравнений); пп. 2–5 посвящены определению основных величин и формулировкам и доказательствам вспомогательных утверждений. Отметим, что ряд результатов в случае, когда $m = p$ – простое число был анонсирован в [2], однако там имеются неточности (см. замечания после следствия 1 теоремы 3 из п. 7 настоящей работы), а доказательства приведены лишь схематически. Здесь же мы приводим полные доказательства всех теорем.

В отличие от работы [2], где использовалась лемма В. Шмидта [3], основным инструментом доказательств настоящей работы будет лемма Конягина [1; лемма 1] (ее доказательство мы, естественно, здесь не приводим; оно, в свою очередь, использует соображения из работы П. Эрдёша, А. Шаркози, К. Мадуи [4]).

Отметим, что при малых значениях N (таких, что $K_s^D(N) \gg p^{1/2+\varepsilon}$) нетривиальные оценки сумм значений характера по простому модулю p могут быть получены с помощью применения оценок А. Вейля, что сделано в работе [5]. Ряд арифметических свойств множеств (1) получен в [6]. В частности, там доказана асимптотическая формула для количества элементов в множестве

$$K_s^D(N,m) = \{x \in K_s^D(N) : (x,m) = 1\},$$

которая тоже имеет отношение к настоящей работе (см. замечание к лемме 3 из п. 6). Отметим также, что, как показано в работе [7], некоторые результаты о распределении элементов множеств (1) по модулю m могут быть получены с помощью исследования количества решений сравнений вида

$$x_1 + \dots + x_l \equiv y_1 + \dots + y_l \pmod m, \qquad x_j, y_j \in K_s^D(N).$$

Утверждения, имеющиеся в [7], можно получить, применяя теоремы типа неравенства Плюнеке (см. [8; гл. 7]). Некоторые результаты могут быть получены с помощью классического подхода Шмидта [3].

2. Конечные ряды Фурье для характеров по составному модулю. Пусть $m = \prod_{1 \leqslant j \leqslant t} p_j^{\alpha_j}$ – каноническое разложение числа m на простые множители. Пусть $\chi(x)$ – характер по модулю m. Тогда согласно китайской теореме об остатках

$$\chi(x) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant t} \chi_j(x),$$

где χ_j суть некоторые характеры по модулям $p_j^{\alpha_j}$ соответственно. Нам понадобится разложение характера χ в конечный ряд Фурье

$$\chi(x) = \sum_{y=1}^{m} c_m(\chi, y) \exp\biggl(2\pi i \frac{xy}{m}\biggr).$$

Заметим, что если характер $\chi = \chi_0$ является главным по модулю m, то его коэффициенты Фурье называются *суммами Рамануджана* (см. [9]) и вычисляются по формуле

$$c_m(\chi_0, y) = \frac{\mu(Y)\varphi(m)}{m\varphi(Y)},$$

где $\mu(\,\cdot\,)$ и $\varphi(\,\cdot\,)$ суть функции Мёбиуса и Эйлера, а $Y = m/(m,y)$.

Рассмотрим некоторый делитель $a \mid m$, $a = \prod_{1 \leqslant j \leqslant t} p_j^{\beta_j}$, $0 \leqslant \beta_j \leqslant \alpha_j$. Для этого делителя определим непересекающиеся множества индексов

$$\mathscr{J}_1 = \mathscr{J}_1(m,a) = \{j \mid 1 \leqslant j \leqslant t,\ \beta_j > 0\}, \quad \mathscr{J}_2 = \mathscr{J}_2(m,a) = \{j \mid 1 \leqslant j \leqslant t,\ \beta_j = 0\}.$$

Пусть

$$m = m_1 m_2, \qquad m_\nu = m_\nu(a) = \prod_{j \in \mathscr{J}_\nu} p_j^{\alpha_j}, \quad (m_1, a) = a, \quad (m_2, a) = 1. \tag{3}$$

3*

Лемма 1. *Множество всех характеров по модулю m распадается в дизъюнктное объединение множеств*

$$\bigsqcup_{a|m} \Xi_a$$

так, что Ξ_1 состоит из одного главного характера по модулю m, а из принадлежности $\chi \in \Xi_a$, $a > 1$, следует, что характер χ представим в виде

$$\chi(x) = \chi^{(1)}(x) \cdot \chi^{(2)}(x),$$

где $\chi^{(1)}$ есть неглавный характер по модулю m_1, причем

$$\chi^{(1)}(x) = \sum_{\substack{1 \leqslant y \leqslant a \\ (a,y)=1}} c^{(1)}(y) \exp\biggl(2\pi i \frac{xy}{a}\biggr),$$

и при каждом y выполняется

$$|c^{(1)}(y)| = a^{-1/2},$$

а $\chi^{(2)}(x)$ есть главный характер по модулю m_2. Для мощностей множеств Ξ_a выполнено равенство

$$|\Xi_a| = \sum_{d|a} \mu(d)\varphi\biggl(\frac{a}{d}\biggr) = \prod_{j=1}^{t} f(p_j^{\beta_j}), \qquad f(p^\beta) = \begin{cases} 1, & \beta = 0, \\ p-2, & \beta = 1, \\ p^{\beta-2}(p-1)^2, & \beta \geqslant 2. \end{cases} \tag{4}$$

Замечание 1. Отметим, что если $m_1 = 1$, то можно считать, что лемма 1 справедлива с $\chi^{(1)}(x) = 1\ \ \forall\, x$.

Замечание 2. Естественно, в случае $m = p$ из леммы 1 для неглавного характера получается равенство $|c_m(\chi, y)| = p^{-1/2}$ для любого y взаимно простого с p.

Замечание 3. Ясно, что выполнено неравенство

$$|\Xi_a| \leqslant a \qquad \forall\, a \mid m. \tag{5}$$

Доказательство леммы 1 имеется, например, в [10; с. 349–355, § 9, приложение].

Отметим что в разложениях $\chi = \chi^{(1)}\chi^{(2)}$ характеры $\chi^{(1)}$ из множества Ξ_a являются неглавными *примитивными* характерами по модулю a. Если χ – неглавный характер по модулю m, то для того, чтобы понять, при каком a будет выполнено $\chi \in \Xi_a$, надо представить χ в виде $\chi = \chi^{(1)}\chi^{(2)}$, где $\chi^{(2)}$ – главный характер по модулю m_2, а $\chi^{(1)}$ – такой характер по модулю m_1 ($m = m_1 m_2$, $(m_1, m_2) = 1$), что он является характером по модулю a (здесь a есть делитель числа m_1), но не является характером ни по какому меньшему модулю $a' \mid a$.

3. О тригонометрических суммах. Будем рассматривать тригонометрические суммы вида

$$S_{d,w} = \sum_{\substack{1\leqslant y\leqslant d\\(y,d)=1}} \biggl|\sum_{x\in K_s^D(s^w)} \exp\biggl(2\pi i\frac{xy}{d}\biggr)\biggr|,$$

$$S_{d,w}(\chi,b) = \sum_{\substack{1\leqslant y\leqslant d\\(y,d)=1}} \biggl|\sum_{x\in K_s^D(s^w)} \chi(x+b)\exp\biggl(2\pi i\frac{xy}{d}\biggr)\biggr|,$$

где χ – характер по модулю m.

Всюду ниже будем считать, что натуральное r выбрано из условия

$$s^{r-1} \leqslant m < s^r. \tag{6}$$

Основным инструментом будет следующая лемма, доказанная Конягиным.

Лемма 2 (см. [1; лемма 1]). *Пусть $m \geqslant s$. С некоторыми положительными постоянными $\gamma_\nu = \gamma_\nu(s)$, $\nu = 1, 2$, при $w \geqslant 2r$ выполняется оценка*

$$\sum_{d\leqslant m} S_{d,w} \leqslant |K_s^D(s^w)|\biggl(\exp\biggl(\gamma_1\cdot\frac{\log m}{\exp(\gamma_2 w/\log m)}\biggr)-1\biggr).$$

Замечание. Лемма 2 является непосредственной переформулировкой результата из [1]; там требуется условие $m \geqslant s$. Однако, ясно, что лемма 2 справедлива и при любом $m \geqslant 2$ с несколько большим γ_1 и заменой знака '$\leqslant$' на '$\ll$'.

4. Оценки вспомогательных величин. Фиксируем положительное ε. Всюду ниже считаем, что σ достаточно велико, т.е. $\sigma \geqslant \sigma_0(s,\varepsilon)$ и $w \geqslant \sigma r$.

Для делителя $a \mid m$ рассмотрим величины $m_\nu = m_\nu(a)$, задаваемые формулами (3), положим $\overline{m_2} = \max\{m_2, 3\}$ и определим величины

$$R_w^1(m,a) = \frac{\log\log\overline{m_2}}{a^{1/2}} \sum_{2\leqslant q\leqslant m_2} \frac{1}{q^2}\cdot\biggl(\exp\biggl(\frac{\gamma_1\log aq}{\exp(\gamma_2 w/\log aq)}\biggr)-1\biggr), \tag{7}$$

$$R_w^2(m,a) = \frac{\log\log\overline{m_2}}{a^{1/2}m_2}\biggl(\exp\biggl(\frac{\gamma_1\log am_2}{\exp(\gamma_2 w/\log am_2)}\biggr)-1\biggr) \tag{8}$$

(заметим, что если $a=1$, то $m_2 = m$),

$$R_w^3(m,a) = \frac{\varphi(m_2)}{a^{1/2}m_2}\biggl(\exp\biggl(\frac{\gamma_1\log a}{\exp(\gamma_2 w/\log a)}\biggr)-1\biggr) \tag{9}$$

(эту величину определяем только при $a>1$) и

$$\Delta_w(m,a) = R_w^1(m,a) + R_w^2(m,a) + R_w^3(m,a). \tag{10}$$

При $a = m = p$ простом, $m_2 = 1$ и из определения величин R_w^j при $\sigma \geqslant \sigma_0(s,\varepsilon)$ и $w \geqslant \sigma r$ будет выполнено

$$\Delta_w(p,p) \ll p^{-1/2+\varepsilon}. \tag{11}$$

Для оценок в общем случае нам понадобятся неравенство

$$\exp\biggl(\frac{\xi}{\exp(b/\xi)}\biggr)-1\ll\frac{\xi}{\exp(b/\xi)}\qquad\text{при}\quad 0\leqslant\xi\leqslant\frac{b}{\log b}\tag{12}$$

и соотношение

$$\max_{\xi:\xi\geqslant c}\exp\biggl(-\log\xi-\frac{b}{\log\xi}\biggr)=\begin{cases}\exp(-2\sqrt{b}\,), & \text{если } c\leqslant\exp(\sqrt{b}\,),\\ \dfrac{1}{c\cdot\exp(b/\log c)}, & \text{если } c\geqslant\exp(\sqrt{b}\,).\end{cases}\tag{13}$$

Оценим $R^1_w(m,a)$. Во-первых, для q из соответствующей области суммирования выполнено $aq\leqslant am_2\leqslant m$ и, следовательно,

$$\frac{\gamma_2 w}{\log qm_2}\geqslant\frac{\gamma_2 w}{\log m}\geqslant\frac{\gamma_2\sigma}{\log s}.$$

Таким образом, при достаточно большом σ будет выполнено

$$\frac{\gamma_1}{\exp(\gamma_2 w/\log am_2)}\leqslant\varepsilon$$

(использовано определение величины w из самого начала текущего пункта и определение величины r из условия (6)). А поскольку при малом ε ряд $\sum_q q^{-2+\varepsilon}$ очевидно сходится, всегда будет иметь место оценка

$$R^1_w(m,a)\ll\frac{\log\log\overline{m_2}}{a^{1/2-\varepsilon}}.\tag{14}$$

Во-вторых, если обозначить

$$E=\exp\biggl(\frac{\gamma_2 w}{\log\gamma_1\gamma_2 w}\biggr),$$

то запишем

$$\sum_{2\leqslant q\leqslant m_2}\frac{1}{q^2}\cdot\biggl(\exp\biggl(\frac{\gamma_1\log aq}{\exp(\gamma_2 w/\log aq)}\biggr)-1\biggr)=\sum_{q\leqslant E/a}+\sum_{q>E/a}.$$

Рассуждая так же, как и при получении оценки (14), убеждаемся, что

$$\sum_{q>E/a}\leqslant\sum_{q>E/a}q^{-2+\varepsilon}a^{\varepsilon}=O\biggl(\frac{a}{E^{1-\varepsilon}}\biggr).$$

Если теперь выполнено

$$a\leqslant E^{1/3}=\exp\biggl(\frac{\gamma_2 w}{3\,\log\gamma_1\gamma_2 w}\biggr),$$

то при достаточно большом σ (достаточно малом ε) получается

$$R^1_w(m,a)\ll\frac{\log\log\overline{m_2}}{a^{1/2}}\biggl(\sum_{2\leqslant q\leqslant E/a}\frac{1}{q^2}\cdot\biggl(\exp\biggl(\frac{\gamma_1\log aq}{\exp(\gamma_2 w/\log aq)}\biggr)-1\biggr)+O(E^{-1/3})\biggr),$$

причем здесь уже в каждом слагаемом суммы по q можно применить неравенство (12) (где полагаем $\xi = \gamma_1 \log aq$ и $b = \gamma_1\gamma_2 w$). Задавшись некоторым положительным Q, проводим следующую оценку:

$$\begin{aligned} R_w^1(m,a) &\ll \frac{\log\log \overline{m_2}}{a^{1/2}}\biggl(\sum_{q\leqslant m_2}\frac{1}{q^2}\cdot\frac{\log aq}{\exp(\gamma_2 w/\log aq)} + O(E^{-1/3})\biggr) \\ &\ll \frac{\log m\,\log\log \overline{m_2}}{a^{1/2}}\biggl(\frac{1}{\exp(\gamma_2 w/\log aQ)}\cdot\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{q^2} + \sum_{q>Q}\frac{1}{q^2} + O(E^{-1/3})\biggr) \\ &\ll \frac{\log m\,\log\log \overline{m_2}}{a^{1/2}}\biggl(\frac{1}{\exp(\gamma_2 w/\log aQ)} + \frac{1}{Q} + O(E^{-1/3})\biggr). \end{aligned}$$

Оптимально величину Q выбрать из условия

$$\exp\biggl(\frac{\gamma_2 w}{\log aQ}\biggr) = Q, \tag{15}$$

т.е. $\log Q = (\sqrt{\log^2 a + 4\gamma_2 w} - \log a)/2$. Тогда получаем

$$R_w^1(m,a) \ll \frac{\log m\,\log\log \overline{m_2}}{a^{1/2}}\biggl(\frac{1}{\exp((\sqrt{\log^2 a + 4\gamma_2 w} - \log a)/2)} + O(E^{-1/3})\biggr).$$

В разбираемом нами случае $a \leqslant E^{1/3}$ рассмотрим еще две возможности. Во-первых, если $a \leqslant \exp(\sqrt{\gamma_2 w/2}\,)$, то

$$\frac{1}{2}(\sqrt{\log^2 a + 4\gamma_2 w} - \log a) \geqslant \sqrt{\frac{\gamma_2 w}{2}},$$

$$R_w^1(m,a) \ll \frac{\log m\,\log\log \overline{m_2}}{a^{1/2}}\biggl(\frac{1}{\exp(\sqrt{\gamma_2 w/2}\,)} + O(E^{-1/3})\biggr) \ll \frac{\log m\,\log\log \overline{m_2}}{a^{1/2}\exp(\sqrt{\gamma_2 w/2}\,)}.$$

(То, что величиной $O(E^{-1/3})$ здесь можно пренебречь, очевидно из определения E.)

Во-вторых, если $a \geqslant \exp(\sqrt{\gamma_2 w/2}\,)$, то

$$\log aQ = \log a + \log Q = \frac{\sqrt{\log^2 a + 4\gamma_2 w} + \log a}{2}.$$

Так как Q удовлетворяет (15), то

$$\begin{aligned} R_w^1(m,a) &\ll \frac{\log m\,\log\log \overline{m_2}}{a^{1/2}}\biggl(\frac{1}{\exp(\gamma_2 w/\log aQ)} + O(E^{-1/3})\biggr) \\ &\ll \frac{\log m\,\log\log \overline{m_2}}{a^{1/2}\exp(\gamma_2 w/(2\,\log a))}. \end{aligned}$$

(То, что величиной $O(E^{-1/3})$ здесь можно пренебречь, следует из неравенства

$$\exp\biggl(\frac{\gamma_2 w}{\log aQ}\biggr) \leqslant \exp\biggl(\frac{\gamma_2 w}{\log a}\biggr) \leqslant \exp(\sqrt{\gamma w}\,)$$

с некоторым положительным γ.)

Запишем полученные нами неравенства для величины $R^1_w(m,a)$ удобным нам образом:

$$R^1_w(m,a) \ll \begin{cases} \dfrac{\log\log \overline{m_2}}{a^{1/2-\varepsilon}}, & \text{если } a \geqslant \exp\left(\dfrac{\gamma_2 w}{3\,\log\gamma_1\gamma_2 w}\right), \\ \dfrac{\log m\,\log\log\overline{m_2}}{a^{1/2}\exp(\gamma_2 w/(2\,\log a))}, & \text{если } \exp\left(\sqrt{\dfrac{\gamma_2 w}{2}}\right) \leqslant a \leqslant \exp\left(\dfrac{\gamma_2 w}{3\,\log\gamma_1\gamma_2 w}\right), \\ \dfrac{\log m\,\log\log\overline{m_2}}{a^{1/2}\exp(\sqrt{\gamma_2 w/2}\,)}, & \text{если } a \leqslant \exp\left(\sqrt{\dfrac{\gamma_2 w}{2}}\right). \end{cases} \tag{16}$$

Займемся оценкой величины $R^2_w(m,a)$. Во-первых, снова $am_2 \leqslant m$ и, значит,

$$\frac{\gamma_2 w}{\log am_2} \geqslant \frac{\gamma_2 w}{\log m} \geqslant \frac{\gamma_2\sigma}{\log s}.$$

Следовательно, при достаточно большом σ опять будет выполнено

$$\frac{\gamma_1}{\exp(\gamma_2 w/\log am_2)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

и всегда будет иметь место оценка

$$R^2_w(m,a) \ll \frac{\log\log\overline{m_2}}{a^{1/2}m_2}\cdot(am_2)^{\varepsilon/2} \ll \frac{1}{a^{1/2-\varepsilon}m_2^{1-\varepsilon}}.$$

Если выполнено

$$am_2 \leqslant \exp\left(\frac{\gamma_2 w}{\log\gamma_1\gamma_2 w}\right),$$

то можно применить неравенство (12), и получается оценка

$$\begin{aligned} R^2_w(m,a) &\ll \frac{\log\log\overline{m_2}}{a^{1/2}m_2}\cdot\frac{\log am_2}{\exp(\gamma_2 w/\log am_2)} \\ &\ll a^{1/2}\log m\,\log\log\overline{m_2}\cdot\max_{\xi:\xi\geqslant a}\exp\left(-\log\xi-\frac{\gamma_2 w}{\log\xi}\right) \end{aligned}$$

(здесь снова использовано, что $am_2 \leqslant m$, взято $\xi = am_2$ и $b = \gamma_2 w$). В этом случае мы рассмотрим дополнительно два подслучая, в зависимости от того, где достигается максимум в формуле (13). Если кроме указанного неравенства выполнено еще $a \geqslant \exp(\sqrt{\gamma_2 w}\,)$, то

$$R^2_w(m,a) \ll \frac{\log m\,\log\log\overline{m_2}}{a^{1/2}\exp(\gamma_2 w/\log a)}.$$

Если же $a \leqslant \exp(\sqrt{\gamma_2 w}\,)$, то

$$R^2_w(m,a) \ll \frac{a^{1/2}\log m\,\log\log\overline{m_2}}{\exp(2\cdot\gamma_2 w/\log a)} \leqslant \frac{\log m\,\log\log\overline{m_2}}{\exp(\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\gamma_2 w}\,)}.$$

Итак, подводя итог, запишем полученные оценки удобным нам образом:

$$R^2_w(m,a) \ll \begin{cases} a^{-1/2+\varepsilon}m_2^{-1+\varepsilon}, & \text{если } am_2 \geqslant \exp\left(\dfrac{\gamma_2 w}{\log\gamma_1\gamma_2 w}\right), \\ \dfrac{1}{a^{1/2}\exp(\gamma_2 w/\log a)}, & \text{если } am_2 \leqslant \exp\left(\dfrac{\gamma_2 w}{\log\gamma_1\gamma_2 w}\right),\ a \geqslant \exp(\sqrt{\gamma_2 w}\,), \\ \exp\left(-\dfrac{3}{2}\cdot\sqrt{\gamma_2 w}\right), & \text{если } am_2 \leqslant \exp\left(\dfrac{\gamma_2 w}{\log\gamma_1\gamma_2 w}\right),\ a \leqslant \exp(\sqrt{\gamma_2 w}\,). \end{cases} \tag{17}$$

Теперь займемся величиной $R_w^3(m,a)$. Она оценивается проще, чем две предыдущие величины, поскольку у нее в аргументе экспоненты отсутствует m_2. Как и прежде, при достаточно большом σ и при любом a будет иметь место оценка

$$R_w^3(m,a) \ll a^{-1/2+\varepsilon},$$

а при $a \leqslant \exp(\gamma_2 w/\log\gamma_1\gamma_2 w)$ из неравенства (12) получаем

$$R_w^3(m,a) \ll \frac{\log a}{a^{1/2}} \cdot \frac{1}{\exp(\gamma_2 w/\log a)}.$$

Объединим имеющиеся два неравенства:

$$R_w^3(m,a) \ll \begin{cases} a^{-1/2+\varepsilon}, & \text{если } a \geqslant \exp\left(\dfrac{\gamma_2 w}{\log\gamma_1\gamma_2 w}\right), \\ \dfrac{\log a}{a^{1/2}} \cdot \dfrac{1}{\exp(\gamma_2 w/\log a)}, & \text{если } a \leqslant \exp\left(\dfrac{\gamma_2 w}{\log\gamma_1\gamma_2 w}\right). \end{cases} \tag{18}$$

Из формул (16)–(18) легко видеть, что в рассматриваемой нами ситуации при $a>1$ всегда будет выполнено

$$\Delta_w(m,a) \ll \exp(-\sqrt{\gamma w}\,), \qquad \gamma > 0. \tag{19}$$

Более детальный анализ формул (16)–(18)) показывает, что для величины $\Delta_w(m,a)$ справедливы те же оценки, что и для $R_w^1(m,a)$:

$$\Delta_w(m,a) \ll \begin{cases} \dfrac{\log\log\overline{m_2}}{a^{1/2-\varepsilon}}, & \text{если } a \geqslant \exp\left(\dfrac{\gamma_2 w}{3\,\log\gamma_1\gamma_2 w}\right), \\ \dfrac{\log m\,\log\log\overline{m_2}}{a^{1/2}\exp(\gamma_2 w/(2\,\log a))}, & \text{если } \exp\left(\sqrt{\dfrac{\gamma_2 w}{2}}\right) \leqslant a \leqslant \exp\left(\dfrac{\gamma_2 w}{3\,\log\gamma_1\gamma_2 w}\right), \\ \dfrac{\log m\,\log\log\overline{m_2}}{a^{1/2}\exp(\sqrt{\gamma_2 w/2}\,)}, & \text{если } a \leqslant \exp\left(\sqrt{\dfrac{\gamma_2 w}{2}}\right). \end{cases} \tag{20}$$

Теперь для натурального l рассмотрим величину

$$\Delta_w^l(m) = \sum_{a|m,\, a>1} |\Xi_a| \left(\Delta_w(m,a) + \frac{1}{m}\right)^l \leqslant \sum_{a|m,\, a>1} a \cdot \left(\Delta_w(m,a) + \frac{1}{m}\right)^l \tag{21}$$

(мы уже учли (5)) и оценим ее сверху с помощью полученных неравенств для величины $\Delta_w(m,a)$.

В самом легком случае, когда $m=p$ – простое число, сразу получаем оценку

$$\Delta_w^l(p) \ll p^{-l/2+1+l\varepsilon} \tag{22}$$

при достаточно большом $\sigma \geqslant \sigma_1(s,\varepsilon)$.

Отметим также, что если минимальный отличный от единицы делитель a_0 числа m окажется больше, чем $\exp(\gamma_2 w/\log\gamma_1\gamma_2 w)$, то (поскольку количество делителей m не превосходит $\exp(\log m/\log\log m)$) при достаточно большом $\sigma \geqslant \sigma_2(s,\varepsilon)$ и $w \geqslant \sigma r$ получим

$$\Delta_w^l(p) \ll a_0^{-l/2+1+(l+1)\varepsilon}. \tag{23}$$

Разберем случай произвольного m при $l \geqslant 2$. Сначала заметим, что

$$\Delta_w^l(m) \leqslant 2^l \sum_{a|m,\, a>1} a \cdot \max\left((\Delta_w(m,a))^l, \frac{1}{m^l}\right) \leqslant 2^l \sum_{a|m,\, a>1} a \cdot \left((\Delta_w(m,a))^l + \frac{1}{m^l}\right).$$

Таким образом,

$$\Delta_w^l(m) \ll \overline{\Delta}_w^l(m) + \sum_{a|m,\, a>1} \frac{a}{m^l},$$

где

$$\overline{\Delta}_w^l(m) = \sum_{a|m,\, a>1} a \cdot (\Delta_w(m,a))^l.$$

А поскольку при $l \geqslant 3$ выполнено

$$\sum_{a|m,\, a>1} \frac{a}{m^l} \leqslant \frac{1}{m}$$

и при $l = 2$ имеет место

$$\sum_{a|m,\, a>1} \frac{a}{m^2} \leqslant 1,$$

наша задача сводится к получению оценки сверху для $\overline{\Delta}_w^l(m)$.

Разобьем сумму в определении $\overline{\Delta}_w^l(m)$ на три:

$$\overline{\Delta}_w^l(m) = \sum_{a|m,\, a>1} a \cdot (\Delta_w(m,a))^l = \Sigma^1 + \Sigma^2 + \Sigma^3,$$

$$\Sigma^1 = \sum_{a > \exp(\gamma_2 w/(3\, \log \gamma_1\gamma_2 w))},$$

$$\Sigma^2 = \sum_{\exp(\sqrt{\gamma_2 w/2}\,) < a \leqslant \exp(\gamma_2 w/(3\, \log \gamma_1\gamma_2 w))}, \qquad \Sigma^3 = \sum_{a \leqslant \exp(\sqrt{\gamma_2 w/2}\,)}.$$

Сначала оценим суммы Σ^1 и Σ^3. При $l \geqslant 3$, $l\varepsilon + 1 \leqslant l/2$ выполнено

$$\Sigma^1 \ll (\log\log m)^l \cdot \exp\left(\left(-\frac{l}{2} + 1 + l\varepsilon\right) \cdot \frac{\gamma_2 w}{3\, \log \gamma_1\gamma_2 w}\right) \cdot \sum_{a|m} 1 \ll \exp\left(-\frac{\gamma w}{\log w}\right)$$

с некоторым положительным γ при достаточно большом $\sigma > \sigma_3(s,l)$ (мы использовали первую оценку из (20) и неравенство $\sum_{a|m} 1 \ll \exp(\log m/\log\log m)$). Также при $l \geqslant 2$ выполнено

$$\Sigma^3 \ll (\log m\, \log\log m)^l \cdot \exp\left(-l \cdot \sqrt{\frac{\gamma_2 w}{2}}\right) \cdot \sum_{a \leqslant \exp(\sqrt{\gamma_2 w/2}\,)} 1 \ll \exp(-\sqrt{\gamma w}\,)$$

с некоторым положительным γ (использована третья оценка из (20)).

Наиболее неприятная ситуация возникает при оценке суммы Σ^2. Здесь придется использовать неравенство

$$\sum_{a|m} \frac{1}{a^\rho} \leqslant \exp\left(\gamma(\rho)\frac{(\log m)^{1-\rho}}{\log\log m}\right) \ll \exp\left(\gamma(\rho)\frac{r^{1-\rho}}{\log r}\right), \tag{24}$$

которое выполняется при каждом $\rho \in (0,1)$ с некоторой положительной постоянной $\gamma(\rho)$, равномерно ограниченной при ρ, отделенном от нуля и единицы. Использовавшиеся нами ранее оценки этой суммы с $\rho = 0,1$ имеются, например, в [9]. Приведенная выше оценка (24), по-видимому, является общеизвестной, но авторы не смогли найти соответствующей ссылки и, для полноты изложения, ниже в п. 5 приводится доказательство неравенства (24).

Если $l \geqslant 4$, проводим оценку с применением второй оценки из (20) и (24) при $\rho = 1/2$ и, учитывая, что

$$a \cdot \frac{1}{a^{l/2}} \leqslant \frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{\exp(\sqrt{\gamma_2 w/2}/2)} \cdot \frac{1}{a^{1/2}}$$

и что $w \geqslant \sigma r$:

$$\Sigma^2 \ll \frac{(\log m\, \log\log m)^l}{\exp(\sqrt{\gamma_2 w/2}/2)} \cdot \sum_{a|m} \frac{1}{a^{1/2}}$$
$$\ll \exp\biggl(\Bigl(-\frac{1}{2} + \varepsilon\Bigr) \cdot \sqrt{\frac{\gamma_2 w}{2}} + \gamma(1/2)\frac{r^{1/2}}{\log r}\biggr) \ll \exp(-\sqrt{\gamma w}\,).$$

Отметим, что в данном рассуждении во втором неравенстве оценки (20) нам не понадобился дополнительный множитель $\exp(\gamma_2 w/(2\, \log a))$ в знаменателе, и мы его оценили единицей.

Итак, при $l \geqslant 4$ получаем

$$\Delta_w^l(m) \ll \exp(-\sqrt{\gamma w}\,), \qquad \gamma > 0. \tag{25}$$

Если же $l = 3$, то, выбирая

$$Q_1 = \exp\biggl(\sqrt{\frac{\gamma_2 w\, \log r}{\log\log r}}\biggr) > \exp\biggl(\sqrt{\frac{\gamma_2 w}{2}}\biggr),$$

опять с учетом второй формулы из (20) имеем

$$\Sigma^2 \ll (\log m\, \log\log m)^3 \cdot \biggl(\sum_{a|m,\, a\leqslant Q_1} \frac{1}{a^{1/2}\exp(3\gamma_2 w/(2\, \log a))}$$
$$+ \sum_{a|m,\, a>Q_1} \frac{1}{a^{1/2}\exp(3\gamma_2 w/(2\, \log a))}\biggr).$$

Отметим, что здесь наличие в знаменателе второй формулы из (20) множителя $\exp(3\gamma_2 w/(2\, \log a))$ уже существенно.

Применяя (24) с $\rho = 1/2$ и используя то, что $w > \sigma r$, получаем с некоторым положительным γ оценку

$$\sum_{a|m,\, a\leqslant Q_1} \ll \exp\Bigl(-\frac{\gamma_2 w}{\log Q_1}\Bigr) \cdot \sum_{a|m} \frac{1}{a^{1/2}}$$
$$\ll \exp\biggl(-\sqrt{\frac{\gamma_2 w\, \log\log r}{\log r}} + \gamma\Bigl(\frac{1}{2}\Bigr) \cdot \frac{\sqrt{r}}{\log r}\biggr) \ll \exp\biggl(-\sqrt{\frac{\gamma w\, \log\log r}{\log r}}\biggr).$$

Далее, выбирая
$$\delta=\frac{\log\log r}{2\,\log r}$$
и применяя (24) с $\rho=1/2-\delta$, убеждаемся, что с некоторым положительным γ выполнено
$$\sum_{a|m,\,a>Q_1}\ll\frac{1}{Q_1^{\delta}}\cdot\sum_{a|m}\frac{1}{a^{1/2-\delta}}$$
$$\ll\exp\biggl(-\delta\cdot\sqrt{\frac{\gamma_2 w\,\log r}{\log\log r}}+\gamma\biggl(\frac{1}{2}-\delta\biggr)\frac{r^{1/2+\delta}}{\log r}\biggr)\ll\exp\biggl(-\sqrt{\frac{\gamma w\,\log\log r}{\log r}}\biggr),$$
ибо
$$\delta\cdot\sqrt{\frac{\gamma_2 w\,\log r}{\log\log r}}=\sqrt{\frac{\gamma_2 w\,\log\log r}{4\,\log r}}\geqslant\sqrt{\frac{\gamma_2\sigma r\,\log\log r}{4\,\log r}}\geqslant\sqrt{\frac{r}{\log r}}=\frac{r^{1/2+\delta}}{\log r}.$$

Итак, при $l=3$ получаем
$$\Delta_w^3(m)\ll\exp\biggl(-\sqrt{\frac{\gamma w\,\log\log r}{\log r}}\biggr),\qquad\gamma>0.\tag{26}$$

Отметим, что если же $l=2$, то для $\varepsilon>0$ при $\sigma\geqslant\sigma_5(s,\varepsilon)$ будет выполнено
$$\Delta_w^2(m)\ll m^{\varepsilon}.\tag{27}$$

Отметим также, что если количество делителей m не превосходит $\exp(\sqrt{\log m}\,)$, то при $l\geqslant3$ имеет место оценка
$$\Delta_w^l(m)\ll\exp(-\sqrt{\gamma w}\,),\qquad\gamma>0.\tag{28}$$

5. Доказательство формулы (24). Пусть $m=p_1^{\alpha_1}\cdots p_t^{\alpha_t}$, $p_1<\cdots<p_t$, – каноническое разложение числа m на простые сомножители. Если $q_1<\cdots<q_t$ суть первые t простых чисел, то $q_j\asymp j\,\log j$, $p_j\geqslant q_j$, и понятно, что $t\ll\log m/\log\log m$. Оцениваем интересующую нас сумму:
$$\sum_{a|m}a^{-\rho}=\sum_{\beta_1,\dots,\beta_t=0}^{\alpha_1,\dots,\alpha_t}p_1^{-\rho\beta_1}\cdots p_t^{-\rho\beta_t}\leqslant\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1}\cdots\sum_{\beta_t=0}^{\alpha_t}q_1^{-\rho\beta_1}\cdots q_t^{-\rho\beta_t}$$
$$=\prod_{j=1}^{t}\sum_{\beta_j=0}^{\alpha_j}q_j^{-\rho\beta_j}\leqslant\prod_{j=1}^{t}\sum_{\beta=0}^{\infty}q_j^{-\rho\beta}=\prod_{j=1}^{t}(1-q_j^{-\rho})^{-1},$$
$$\log\sum_{a|m}a^{-\rho}\leqslant-\sum_{j=1}^{t}\log(1-q_j^{-\rho})\leqslant2^{\rho}\log\bigl((1-2^{-\rho})^{-1}\bigr)\cdot\sum_{j=1}^{t}q_j^{-\rho}$$
$$\ll2^{\rho}\log\bigl((1-2^{-\rho})^{-1}\bigr)\cdot\sum_{j=2}^{t}(j\,\log j)^{-\rho}$$
$$\ll2^{\rho}\log\bigl((1-2^{-\rho})^{-1}\bigr)\cdot(1-\rho)^{-1}\cdot t^{1-\rho}(\log t)^{-\rho}$$
$$\ll2^{\rho}\log\bigl((1-2^{-\rho})^{-1}\bigr)\cdot(1-\rho)^{-1}\cdot(\log m)^{1-\rho}(\log\log m)^{-1}.$$

Формула (24) доказана.

6. О суммах значений характеров.

Лемма 3. *Пусть $a \mid m$, $\chi(x) \in \Xi_a$ – характер по модулю m, величина m_2, определенная согласно (3), больше единицы и $\chi^{(1)}$ из леммы 1. Тогда для погрешности R в формуле*

$$\sum_{x\in K_s^D(s^w)} \chi(x+b) = \sum_{\substack{x\in K_s^D(s^w)\\ (x+b,m_2)=1}} \chi^{(1)}(x+b) = \frac{\varphi(m_2)}{m_2}\cdot \sum_{x\in K_s^D(s^w)} \chi^{(1)}(x+b) + R$$

будет выполнена оценка

$$|R| \ll |K_s^D(s^w)| \cdot \bigl(R_w^1(m,a) + R_w^2(m,a)\bigr),$$

где величины $R_w^{1,2}(m,a)$ определены в предыдущем пункте в (7), (8).

Замечание. Сумма $R_w^1(m,a) + R_w^2(m,a)$, очевидно, оценивается сверху через $\Delta_w(m,a)$. Если $m_2 = 1$, то, очевидно, $R = 0$. Если же χ – главный характер по модулю m, то $a = 1$, $m_2 = m$ и с учетом замечания 1 к лемме 1 и третьей оценки из (20) лемма 3 дает при $w \geqslant \sigma r$ формулу

$$|K_s^D(s^w,m)| = \frac{\varphi(m)}{m}\cdot|K_s^D(s^w)|\cdot\left(1 + O\left(\exp\left(-\sqrt{\frac{\gamma_2 w}{2}}\right)\cdot\log m\,\log\log m\right)\right), \tag{29}$$

которая фактически имеется в [6].

Доказательство леммы 3. Всюду в доказательстве леммы 3 при суммировании по $d \mid m_2$ и $q \mid m_2$ считаем, что $d, q > 1$:

$$\begin{aligned}
|R| &\leqslant \sum_{d\mid m_2}\Biggl|\sum_{\substack{x\in K_s^D(s^w)\\ x+b\equiv 0 \pmod d}} \chi^{(1)}(x+b) - \frac{1}{d}\cdot\sum_{x\in K_s^D(s^w)} \chi^{(1)}(x+b)\Biggr| \\
&= \sum_{d\mid m_2}\frac{1}{d}\Biggl|\sum_{1\leqslant z\leqslant d-1}\ \sum_{x\in K_s^D(s^w)} \chi^{(1)}(x+b)\exp\left(2\pi i\frac{z(x+b)}{d}\right)\Biggr| \\
&\leqslant \sum_{d\mid m_2}\frac{1}{d}\sum_{q\mid d} S_{q,w}(\chi^{(1)},b) \leqslant \sum_{q\mid m_2}\Biggl(\sum_{d\mid m_2,\, q\mid d}\frac{1}{d}\Biggr) S_{q,w}(\chi^{(1)},b) \\
&\ll \log\log\overline{m_2}\cdot\sum_{q\mid m_2}\frac{S_{q,w}(\chi^{(1)},b)}{q}.
\end{aligned}$$

Теперь, используя лемму 1, определение сумм $S_{q,w}(\chi,b), S_{q,w}$, взаимную простоту $(q,a) = 1$ (см. (3)) и преобразование Абеля, получаем

$$\begin{aligned}
|R| &\ll a^{-1/2}\log\log\overline{m_2}\cdot\sum_{q\mid m_2}\frac{1}{q}\sum_{\substack{1\leqslant y\leqslant a\\ (a,y)=1}}\ \sum_{\substack{1\leqslant z\leqslant q\\ (z,q)=1}}\Biggl|\sum_{x\in K_s^D(s^w)}\exp\left(2\pi i\left(\frac{zx}{q}+\frac{yx}{a}\right)\right)\Biggr| \\
&= a^{-1/2}\cdot\log\log\overline{m_2}\cdot\sum_{q\mid m_2}\frac{S_{aq,w}}{q} \leqslant a^{-1/2}\cdot\log\log\overline{m_2}\cdot\sum_{2\leqslant q\leqslant m_2}\frac{S_{aq,w}}{q}
\end{aligned}$$

$$\ll a^{-1/2}\log\log\overline{m_2}\cdot\biggl(\sum_{2\leqslant q\leqslant m_2}\frac{1}{q^2}\sum_{d\leqslant q}S_{ad,w}+\frac{1}{m_2}\sum_{d\leqslant m_2}S_{ad,w}\biggr)$$
$$\leqslant a^{-1/2}\log\log\overline{m_2}\cdot\biggl(\sum_{2\leqslant q\leqslant m_2}\frac{1}{q^2}\sum_{d\leqslant aq}S_{d,w}+\frac{1}{m_2}\sum_{d\leqslant am_2}S_{d,w}\biggr).$$

Теперь воспользуемся леммой 2 и определением величин $R_w^{1,2}(m,a)$ (см. (7), (8)) и получим заключение леммы 3.

Теорема 1. *Пусть задано $\varepsilon>0$ и $w\geqslant\sigma r$, $\sigma\geqslant\sigma_0(s,\varepsilon)$ достаточно велико. Пусть для натурального m задан делитель $a\mid m$ и неглавный характер $\chi(x)$ по модулю m таков, что $\chi\in\Xi_a$, $a>1$. Тогда выполняется оценка сверху суммы значений характеров*

$$\biggl|\sum_{x\in K_s^D(s^w)}\chi(x+b)\biggr|\ll|K_s^D(s^w)|\cdot\Delta_w(m,a),$$

где величина $\Delta_w(m,a)$ определена в (10).

Доказательство. В силу леммы 3 достаточно оценить сумму

$$\Sigma=\sum_{x\in K_s^D(s^w)}\chi^{(1)}(x+b). \tag{30}$$

Применяя лемму 1, убеждается, что

$$|\Sigma|\ll a^{-1/2}\cdot S_{a,w}\leqslant a^{-1/2}\cdot\sum_{d\leqslant a}S_{d,w}.$$

Далее применяем лемму 2 и получаем оценку

$$|\Sigma|\ll|K_s^D(s^w)|\cdot\frac{1}{a^{1/2}}\cdot\biggl(\exp\biggl(\frac{\gamma_1\log a}{\exp(\gamma_2 w/\log a)}\biggr)-1\biggr).$$

Теорема 1 сразу следует из последней оценки, определения величин $R_w^j(m,a)$, $\Delta_w(m,a)$, формул (7)–(10) и оценки леммы 3.

Замечание. Необходимую оценку суммы (30) можно получить, не используя лемму 4 из работы Конягина [1], а применяя подход Шмидта из работы [3], аналогично тому, как это сделано в [2]. Применявшееся при доказательстве теоремы 1 неравенство

$$S_{a,w}\leqslant\sum_{d\leqslant a}S_{d,w}$$

на первый взгляд весьма грубое, но тем не менее является достаточно точным.

Теорема 2. *Пусть $N\geqslant s^{w+\rho}$ и выполнены условия теоремы 1. Тогда выполняется оценка*

$$\biggl|\sum_{x\in K_s^D(N)}\chi(x+b)\biggr|\leqslant|K_s^D(N)|\cdot\bigl(\Delta_w(m,a)+(k+1)^{-\rho}\bigr).$$

Доказательство. Пусть $s^\beta \leqslant N < s^{\beta+1}$. Представим N в s-ичной системе счисления: $N = \mu_0 + \dots + \mu_\beta s^\beta$. Разобьем множество $K_s^D(N) = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$, где Ω_1 состоит из тех чисел $n = \eta_0 + \dots + \eta_\beta s^\beta$, для которых $\eta_j = \mu_j$, $w \leqslant j \leqslant \beta$, а Ω_2 состоит изо всех остальных чисел. Ясно, что $|\Omega_1| \leqslant (k+1)^w$. Дополнительное множество представимо в виде суммы множеств $\Omega_2 = K_s^D(s^w) + s^w \cdot K_s^D(N_1)$, где $N_1 = \mu_w + \mu_{w+1}s + \dots + \mu_\beta s^{\beta-w}$. Следовательно, $|\Omega_2| = |K_s^D(s^w)| \cdot |K_s^D(N_1)| \leqslant |K_s^D(N)|$ и

$$\begin{aligned}\Bigl|\sum_{x\in K_s^D(N)} \chi(x+b)\Bigr| &\leqslant \Bigl|\sum_{x\in\Omega_1} \chi(x+b)\Bigr| + \Bigl|\sum_{x\in\Omega_2} \chi(x+b)\Bigr| \\ &\leqslant (k+1)^w + \Bigl|\sum_{b_1\in K_s^D(N_1)} \sum_{x\in K_s^D(s^w)} \chi(x+b+s^w b_1)\Bigr| \\ &\leqslant (k+1)^w + \sum_{b_1\in K_s^D(N_1)} \Bigl|\sum_{x\in K_s^D(s^w)} \chi(x+b+s^w b_1)\Bigr| \\ &\leqslant (k+1)^w + |K_s^D(N)|\Delta_w(m,a)\end{aligned}$$

(мы использовали теорему 1). Остается заметить, что $|K_s^D(N)| \geqslant |K_s^D(s^{w+\rho})| \geqslant (k+1)^{w+\rho}$ и $(k+1)^w \leqslant |K_s^D(N)|/(k+1)^\rho$. Теорема доказана.

Замечание 1. Напомним, что в условиях теоремы 1 требуется, чтобы $w \geqslant \sigma r$. Если кроме этого потребовать, чтобы

$$\rho \geqslant \sigma^* r \frac{\log s}{\log(k+1)},$$

получается, что из условия $N \geqslant s^{w+\rho}$ (что фактически то же самое, что и $N \gg m^{\sigma+(\log s/\log(k+1))\sigma^*}$) будет выполнено

$$\Bigl|\sum_{x\in K_s^D(N)} \chi(x+b)\Bigr| \leqslant |K_s^D(N)| \cdot \bigl(\Delta_w(m,a) + O(m^{-\sigma^*})\bigr).$$

Замечание 2. Для главного характера по модулю m для числа $N \geqslant m^\sigma$ можно доказать формулу, аналогичную (29), однако для дальнейшего нам понадобится (исключительно для того, чтобы более компактно сформулировать результаты о числе решений сравнений в следующих пунктах 7 и 8 настоящей статьи) лишь простое неравенство

$$|K_s^D(N)| \ll |K_s^D(N,m)| \cdot \frac{m}{\varphi(m)}.$$

Оно может быть получено по аналогии с теоремой 2, и доказательство мы не приводим.

Следствие 1. *Если $m = p$ – простое число и χ – неглавный характер по модулю p, то для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ такое, что при $N > m^\sigma$ выполняется*

$$\Bigl|\sum_{x\in K_s^D(N)} \chi(x+b)\Bigr| \ll |K_s^D(N)| \cdot p^{-1/2+\varepsilon}.$$

Следствие 2. *Если m – произвольное натуральное число, χ – неглавный характер по модулю m, при достаточно большом σ при $N > m^\sigma$ выполняется*

$$\Bigl|\sum_{x\in K_s^D(N)}\chi(x+b)\Bigr| \ll |K_s^D(N)|\cdot\exp(-\gamma\sqrt{\sigma\,\log m}\,)$$

с некоторым положительным $\gamma=\gamma(s)$.

Следствие 1 (оно имеется в [2]) сразу вытекает из теоремы 2 (в замечании σ^* надо взять равным $1/2$) и оценки (11) (ср. с замечанием 2 к лемме 1), следствие 2 вытекает из теоремы 2 и оценки (19).

7. О числе решений сравнения $x_1\cdots x_l\equiv\lambda\ (\mathrm{mod}\,m)$**.** Всюду ниже

$$(\lambda,m)=1.$$

Напомним, что через $T_l(N,m,\lambda)$ обозначается количество решений сравнения

$$x_1\cdots x_l\equiv\lambda\ (\mathrm{mod}\,m),\qquad x_j\in K_s^D(N)$$

(ясно, что можно считать $x_j\in K_s^D(N,m)$).

Теорема 3. *Пусть $N\geqslant s^{w+\rho_0}$, $(m,\lambda)=1$, $\varepsilon>0$ и $w\geqslant\sigma r$, $\sigma\geqslant\sigma_0(s,\varepsilon)$ достаточно велико и*

$$\rho_0=r\frac{\log s}{\log(k+1)}\asymp\log m.$$

Тогда

$$T_l(N,m,\lambda)=\frac{|K_s^D(N,m)|^l}{\varphi(m)}+O\biggl(\frac{|K_s^D(N)|^l}{\varphi(m)}\cdot\Delta_w^l(m)\biggr).$$

Доказательство. Ясно, что

$$\biggl|T_l(N,m,\lambda)-\frac{|K_s^D(N,m)|^l}{\varphi(m)}\biggr|\leqslant\frac{|K_s^D(N)|^l}{\varphi(m)}\cdot\sum_{\chi\ (\mathrm{mod}\,m),\,\chi\ne\chi_0}\Bigl|\sum_{x\in K_s^D(N)}\chi(x)\Bigr|^l$$
$$\ll\frac{|K_s^D(N)|^l}{\varphi(m)}\cdot\sum_{a|m,\,a>1}|\Xi_a|\biggl(\Delta_w(m,a)+\frac{1}{m}\biggr)^l=\frac{|K_s^D(N)|^l}{\varphi(m)}\cdot\Delta_w^l(m)$$

(мы использовали теорему 2 и замечание к ней, а также определение (21) величины $\Delta_w^l(m)$). Теорема доказана.

Замечание. Условия теоремы 3 будут выполнены при $N\geqslant m^\sigma$ с достаточно большим $\sigma\geqslant\sigma_1(s,\varepsilon)$.

Следствие 1. *Пусть $m=p$ – простое число и выполнены условия теоремы 3. Тогда*

$$T_l(N,p,\lambda)=\frac{|K_s^D(N,p)|^l}{p-1}\cdot\bigl(1+O(p^{-l/2+1+l\varepsilon})\bigr).$$

Следствие 1 вытекает из (22); оно имеется в [2], но там допущена неточность – вместо $|K_s^D(N,p)|$ в числителе написано просто $|K_s^D(N)|$, что неверно. При $l\geqslant3$ следствие 1 устанавливает асимптотическую формулу для $T_l(N,p,\lambda)$, а при $l=1,2$ – оценку сверху для этой величины. При $l=1$ эта оценка иногда хуже тривиальной оценки $T^1(N,p,\lambda)\ll|K_s^D(N)|p^{-\log s/\log k}$.

Следствие 2. *Пусть m таково, что минимальный отличный от единицы делитель $a_0 \mid m$ удовлетворяет неравенству*

$$a_0 \geqslant \exp\biggl(\frac{\gamma_2 w}{\log \gamma_1\gamma_2 w}\biggr).$$

Тогда при достаточно большом σ и $N \geqslant s^{w+\rho_0}$, $w \geqslant \sigma r$, будет выполнено

$$T_l(N,m,\lambda) = \frac{|K_s^D(N,m)|^l}{\varphi(m)} \cdot \bigl(1 + O(a_0^{-l/2+1+(l+1)\varepsilon})\bigr).$$

Следствие 2 вытекает из (23), замечания 2 к теореме 2 и неравенства $m/\varphi(m) \ll \log\log m$. При $l \geqslant 3$ следствие 2 дает асимптотическую формулу для $T_l(N,m,\lambda)$, а при $l = 1, 2$ – оценку сверху.

Следствие 3. *Пусть m таково, что количество делителей m не превосходит $\exp(\sqrt{\log m}\,)$ (например, $m = p^\alpha$, где p – простое число). Тогда при $l \geqslant 3$ в условиях теоремы 3 с некоторым положительным γ имеет место оценка*

$$\begin{aligned} T_l(N,m,\lambda) &= \frac{|K_s^D(N,m)|^l}{\varphi(m)} \cdot \bigl(1 + O\bigl(\exp(-\sqrt{\gamma w}\,)\bigr)\bigr) \\ &= \frac{|K_s^D(N,m)|^l}{\varphi(m)} \cdot \bigl(1 + O\bigl(\exp(-\sqrt{\gamma\,\log m}\,)\bigr)\bigr). \end{aligned}$$

Следствие 3 вытекает из (28).

Следствие 4. *В условиях теоремы 3 с некоторым положительным γ для произвольного натурального m выполнено следующее.*

1) *Если $l \geqslant 4$, то при достаточно большом σ справедлива асимптотическая формула*

$$\begin{aligned} T_l(N,m,\lambda) &= \frac{|K_s^D(N,m)|^l}{\varphi(m)} \cdot \bigl(1 + O\bigl(\exp(-\sqrt{\gamma w}\,)\bigr)\bigr) \\ &= \frac{|K_s^D(N,m)|^l}{\varphi(m)} \cdot \bigl(1 + O\bigl(\exp(-\sqrt{\gamma\,\log m}\,)\bigr)\bigr). \end{aligned}$$

2) *Если $l = 3$, то при достаточно большом σ справедлива асимптотическая формула*

$$\begin{aligned} T_3(N,m,\lambda) &= \frac{|K_s^D(N,m)|^3}{\varphi(m)} \cdot \Biggl(1 + O\Biggl(\exp\Biggl(-\sqrt{\frac{\gamma w\,\log\log r}{\log r}}\Biggr)\Biggr)\Biggr) \\ &= \frac{|K_s^D(N,m)|^3}{\varphi(m)} \cdot \Biggl(1 + O\Biggl(\exp\Biggl(-\sqrt{\frac{\gamma\,\log m\,\log\log\log m}{\log\log m}}\Biggr)\Biggr)\Biggr). \end{aligned}$$

3) *Если $l = 2$, то для произвольного положительного ε при достаточно большом σ справедлива оценка*

$$T_2(N,m,\lambda) \ll \frac{|K_s^D(N)|^2}{\varphi(m)} \cdot m^\varepsilon.$$

Заключение 1) вытекает из (25), заключение 2) вытекает из (26), заключение 3) вытекает из (27). Опять же, как в следствии 3, так и в следствии 4 для перехода в оценке остаточного члена от $|K_s^D(N)|$ к $|K_s^D(N,m)|$ надо использовать замечание 2 к теореме 2.

8. Об исключительном множестве для сравнения $x_1x_2 \equiv \lambda \pmod m$.

Теорема 4. *Пусть $N \geqslant s^{w+\rho_0}$, $\varepsilon > 0$ и $w \geqslant \sigma r$ с достаточно большим σ. Пусть также*

$$B = \{\lambda \pmod m) : (z, m) = 1,\ \lambda \not\equiv ab \pmod m \mid a, b \in K_s^D(N, m)\}.$$

Тогда

$$|B| \ll \varphi(m) \cdot \left(\frac{m}{\varphi(m)}\right)^4 \cdot \Delta_w^4(m).$$

Из оценки (25) величины $\Delta_w^4(m)$ сразу получаем

Следствие. *В условиях теоремы 4 для произвольного натурального m имеем*

$$|B| \ll \varphi(m) \cdot \exp(-\sqrt{\gamma w}\,) \leqslant \varphi(m) \cdot \exp(-\sqrt{\gamma \log m}\,), \qquad \gamma > 0;$$

если же $m = p$ – простое число, то при достаточно большом σ (в зависимости от заданного положительного ε) выполнено $|B| \ll p^{\varepsilon}$.

Доказательство теоремы 4. Всюду ниже $\mathbb{Z}_m = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$. Для доказательства теоремы 4 напомним несколько определений.

Сверткой $(f * g)(x)$ двух функций f и g, $f, g\colon \mathbb{Z}_m \to \mathbb{C}$, называется функция

$$(f * g)(x) = \sum_{z \in \mathbb{Z}_m^*} f(z)\overline{g(zx^{-1})}, \qquad x \in \mathbb{Z}_m^*.$$

Пусть χ – некоторый характер по модулю m. *Преобразованием Фурье* функции $f\colon \mathbb{Z}_m \to \mathbb{C}$ называется функция

$$\widehat{f}(\chi) = \sum_{x \in \mathbb{Z}_m^*} f(x)\chi(x).$$

Следующая лемма общеизвестна.

Лемма 4. *Пусть $f, g\colon \mathbb{Z}_m \to \mathbb{C}$ – некоторые функции. Тогда*

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}_m^*} f(x)\overline{g(x)} = \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi} \widehat{f}(\chi)\overline{\widehat{g}(\chi)}, \tag{31}$$

причем суммирование в правой части (31) проходит по всем характерам группы $\mathbb{Z}_m^*$.

Из (31) и равенства $(\widehat{f * g})(\chi) = \widehat{f}(\chi)\overline{\widehat{g}(\chi)}$ вытекает аналог формулы (31) для свертки.

Лемма 5. *Пусть $f, g\colon \mathbb{Z}_m \to \mathbb{C}$ – некоторые функции. Тогда*

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}_m^*} |(f * g)(x)|^2 = \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi} |\widehat{f}(\chi)|^2 |\widehat{g}(\chi)|^2.$$

Рассмотрим функции

$$\mu_1(t) = \big|\{x \in K_s^D(N) : x \equiv t \pmod m\}\big|, \qquad t \in \mathbb{Z}_m^*,$$
$$\mu_2(t) = \big|\{x \in K_s^D(N) : x \equiv t^{-1} \pmod m\}\big|, \qquad t \in \mathbb{Z}_m^*.$$

Ясно, что

$$|K_s^D(N,m)| = \sum_{t\in\mathbb{Z}_m^*} \mu_1(t) = \sum_{t\in\mathbb{Z}_m^*} \mu_2(t)$$
$$\widehat{\mu}_1(\chi) = \sum_{x\in K_s^D(N)} \chi(x), \qquad \widehat{\mu}_2(\chi) = \sum_{x\in K_s^D(N)} \overline{\chi(x)}. \tag{32}$$

Пусть

$$f_1(t) = \mu_1(t) - \frac{|K_s^D(N,m)|}{\varphi(m)}, \qquad f_2(t) = \mu_2(t) - \frac{|K_s^D(N,m)|}{\varphi(m)}.$$

Тогда

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}_m^*} f_1(t) = \sum_{x\in\mathbb{Z}_m^*} f_2(x) = 0.$$

Кроме того, для любого неглавного характера χ выполнено

$$\widehat{\mu}_i(\chi) = \widehat{f}_i(\chi), \qquad i = 1, 2. \tag{33}$$

Рассмотрим сумму

$$\Sigma = \sum_{x\in\mathbb{Z}_m^*} |(f_1 * f_2)(x)|^2.$$

С одной стороны,

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \sum_{x\in\mathbb{Z}_m^*} |(f_1 * f_2)(x)|^2 = \sum_{x\in\mathbb{Z}_m^*} \bigg|\sum_{z\in\mathbb{Z}_m^*} f_1(z)\overline{f_2(zx^{-1})}\bigg|^2 \\
&= \sum_{x\in\mathbb{Z}_m^*} \bigg|\sum_{z\in\mathbb{Z}_m^*} \bigg(\mu_1(z) - \frac{|K_s^D(N,m)|}{\varphi(m)}\bigg)\bigg(\mu_2(zx^{-1}) - \frac{|K_s^D(N,m)|}{\varphi(m)}\bigg)\bigg|^2 \\
&= \sum_{x\in\mathbb{Z}_m^*} \bigg|\sum_{z\in\mathbb{Z}_m^*} \mu_1(z)\mu_2(zx^{-1}) - \frac{|K_s^D(N,m)|^2}{\varphi(m)}\bigg|^2,
\end{aligned}$$

откуда имеем оценку снизу для Σ следующего вида:

$$\Sigma \geqslant \sum_{x\in B}\bigg|\sum_{z\in\mathbb{Z}_m^*} \mu_1(z)\mu_2(zx^{-1}) - \frac{|K_s^D(N,m)|^2}{\varphi(m)}\bigg|^2 = |B| \cdot \frac{|K_s^D(N,m)|^4}{(\varphi(m))^2} \tag{34}$$

(мы учли, что если $x \in B$, то сравнение $\xi\eta \equiv x \pmod m$ неразрешимо в числах $\xi, \eta \in K_s^D(N,m)$, а сумма $\sum_{z\in\mathbb{Z}_m^*} \mu_1(z)\mu_2(zx^{-1})$ есть в точности количество решений сравнения $\xi\eta \equiv x \pmod m$, $\xi, \eta \in K_s^D(N,m)$, и, стало быть, для каждого $x \in B$ в (34) внутренняя сумма по z равна нулю).

С другой стороны, применяя лемму 5 и учитывая (32), (33), получаем

$$\Sigma = \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi} |\widehat{f}_1(\chi)|^2 |\widehat{f}_2(\chi)|^2$$
$$= \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi,\, \chi \neq \chi_0} |\widehat{f}_1(\chi)|^2 |\widehat{f}_2(\chi)|^2 = \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi,\, \chi \neq \chi_0} \biggl| \sum_{x \in K_s^D(N)} \chi(x) \biggr|^4.$$

Оценим сверху сумму Σ. Имеем в силу теоремы 2 и замечания 1 к ней

$$\Sigma \leqslant \frac{|K_s^D(N)|^4}{\varphi(m)} \sum_{a|m,\, a>1} |\Xi_a| \biggl(\Delta_w(m,a) + \frac{1}{m} \biggr)^4 = \frac{|K_s^D(N)|^4}{\varphi(m)} \Delta_w^4(m). \tag{35}$$

Применяя оценки (34), (35) величины Σ, находим

$$|B| \, \frac{|K_s^D(N,m)|^4}{(\varphi(m))^2} \ll \frac{|K_s^D(N)|^4}{\varphi(m)} \Delta_w^4(m).$$

Теперь теорема 4 вытекает из замечания 2 к теореме 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] S. Konyagin, “Arithmetic properties of integers with missing digits: distribution in residue classes”, *Period. Math. Hungar.*, **42**:1–2 (2001), 145–162.

[2] Н. Г. Мощевитин, “О числах с ограничениями на цифры”, *Докл. РАН*, **384**:6 (2002), 167–170.

[3] W. Schmidt, “On normal numbers”, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 661–672.

[4] P. Erdős, C. Mauduit, A. Sarközy, “On arithmetic properties of integers with missing digits. I: Distribution in residue classes”, *J. Number Theory*, **70** (1998), 99–120.

[5] W. D. Banks, A. Conflitti, I. E. Shparlinski, “Character sums over integers with restricted g-ary digits”, *Illinois J. Math.*, **46** (2002), 819–836.

[6] W. D. Banks, I. E. Shparlinski, “Arithmetic properties of numbers with restricted digits”, *Acta Arith.*, **112** (2004), 313–332.

[7] Н. Г. Мощевитин, “О числах с пропущенными цифрами: элементарное доказательство одного результата С. В. Конягина”, *Чебышевский сб.*, **3**:3 (2002), 93–99.

[8] M. B. Nathanson, *Additive Number Theory. Inverse Problems and the Geometry of Sumsets*, Graduate Texts in Math., **165**, Springer, Berlin, 1996.

[9] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4th edition, Oxford Univ. Press, Oxford, 1975.

[10] С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана*, Физматлит, М., 1994.

Н. Г. Мощевитин
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: moshchevitin@rambler.ru

Поступило
14.03.2005
Исправленный вариант
20.06.2006

И. Д. Шкредов
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: ishkredov@rambler.ru